

*Là où il y a matière, il y a géométrie.*  
– Johannes Kepler

## Introduction historique

La découverte de l'interaction gravitationnelle, mais surtout sa mise en équation par Newton est un moment clé dans l'histoire de la physique. Si un grand nombre de physicien·nes étudiaient auparavant les planètes et leur mouvement, aucun modèle très satisfaisant n'avait abouti jusque là. Certains avaient déjà pu trouver des lois, comme Kepler à la fin du 16<sup>ème</sup> siècle.

## Notations

Dans toute la suite de ce polycopié, par souci de lisibilité, nous utiliserons les notations suivantes de manière univoque

| Symbole       | Définition                 | Valeur                                                                      |
|---------------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $R_T$         | Rayon de la Terre          | 6400 km                                                                     |
| $M_T$         | Masse de la Terre          | $5.97 \times 10^{24}$ kg                                                    |
| $\mathcal{G}$ | Constante gravitationnelle | $6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ |
| $M_S$         | Masse du Soleil            | $1.99 \times 10^{30}$ kg                                                    |

TABLEAU 1 – Tableau des notations

## 1 Forces centrales

Pendant la préparation, vous avez pu faire de la mécanique un peu générale, en montrant des théorèmes énergétiques, valables dans beaucoup de situations. Ce cours cherche à présenter un aspect particulier de la mécanique, la mécanique céleste. Nous nous intéresserons en particulier à la force d'interaction gravitationnelle, qui permet d'expliquer (entre autres) le mouvement des étoiles. Cette force, tout comme la force d'interaction électrostatique sont des forces qui sont dirigées entre deux centres (de masse ou de charge), et font donc partie d'une catégorie spéciale de forces, qu'on appelle **forces centrales**.

### 1.1 Force centrale conservative

#### Définition 1 : Force centrale

Soit un point matériel  $M$ , plongé dans un champ de force  $F$ . On parle de force **centrale** lorsqu'il est possible de la mettre sous la forme  $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ , où  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{||\vec{OM}||}$

Ces forces peuvent être attractives si  $F(r) < 0$ , comme la force d'attraction gravitationnelle par exemple, ou bien répulsives lorsque  $F(r) > 0$ , ce qui est le cas de la force électrostatique entre deux charges de même signe, ou même changer de signe selon la valeur de  $r$ .

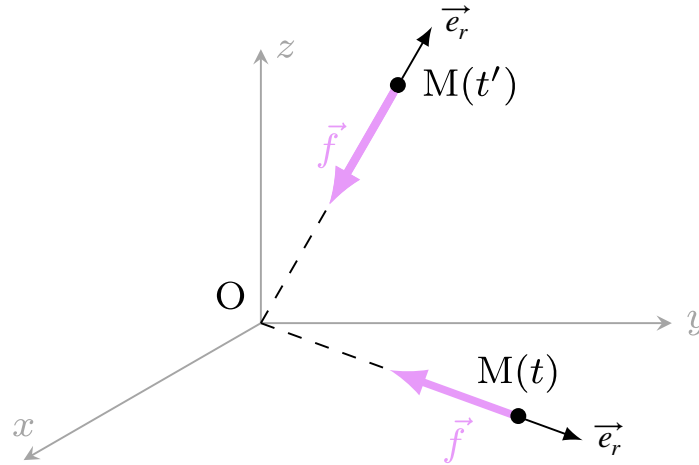


FIGURE 1 – Exemple générique d’une force centrale. On peut imaginer que  $O$  représente la position du Soleil (origine du référentiel héliocentrique) et  $M$  la position de la Terre, qui orbite autour du Soleil. [?]

### Définition 2 : Force conservative

S’il existe une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(r)$  telle que  $\vec{F} = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr}\vec{u}_r$ , alors la force est dite **conservative**

Cette définition est très utile, puisque c’est le cas des deux forces mentionnées juste au dessus.

**Remarque :** *A priori toutes les forces centrales  $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$  sont conservatives, car il suffit de prendre  $\mathcal{E}_p(r) = -\int F(r)dr$ , mais certaines énergies potentielles sont beaucoup plus faciles à calculer que d’autres.*

### Définition 3 : Force newtonienne

Une force centrale est dite **newtonienne** si  $F(r) = -\frac{K}{r^2}$

Le signe de  $K$  définit alors le type d’interaction (attractive ou répulsive).

### Exemples :

- L’interaction gravitationnelle entre deux masses  $M_1$  et  $M_2$  est une force centrale newtonienne avec  $K = \mathcal{G}M_1M_2$ . Elle est conservative, d’énergie potentielle  $\mathcal{E}_p = -\mathcal{G}\frac{M_1M_2}{r} + \text{cte}$ .
- L’interaction électrostatique dans le vide entre deux charges  $Q_1$  et  $Q_2$  est une force centrale newtonienne avec  $K = -\frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0}$ . Elle est également conservative, avec une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cte}$

**Remarque :** On choisit souvent la convention  $\mathcal{E}_p(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$ , i.e.  $\text{cte} = 0$  dans les deux cas mentionnés.

Dans la suite de ce cours, sauf mention explicite du contraire, nous nous placerons dans le cadre d’une force centrale newtonienne conservative.

## 1.2 Approche énergétique

### Propriété 1 : Conservation de l'énergie mécanique

Le système étant soumis uniquement à une force conservative, son énergie mécanique se conserve

### Méthode 1 : Planéité du mouvement

La planéité du mouvement résulte de la conservation du moment cinétique. En effet, par le théorème du moment cinétique appliqué dans le référentiel héliocentrique (qu'on supposera galiléen), on a  $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = r\vec{u}_r \wedge F(r)\vec{u}_r = \vec{0}$ , car le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul.

Ainsi, par définition du moment cinétique, la vitesse est toujours située dans un plan perpendiculaire à  $\vec{L}_O(M)$ , qui est constant.

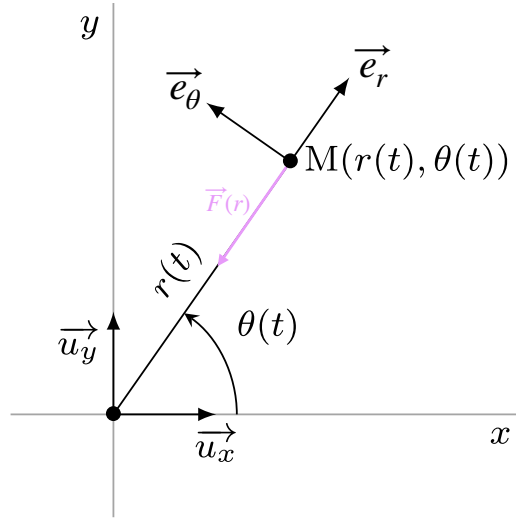


FIGURE 2 – Base polaire utilisée. Le vecteur  $\vec{e}_z$  est pris tel que la base soit orthogonale directe. Par ailleurs, on peut prendre  $\vec{e}_z$  tel que  $\vec{L}_O(M)$  est selon  $\vec{e}_z$  (ce que l'on fait en général).

Le mouvement étant plan, on se place en coordonnées polaires  $(r, \theta, z)$  et on peut écrire :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r} = E_0 \quad (1)$$

En général, on essaie d'étudier des problèmes avec un seul degré de liberté ( $x$  pour un ressort, ou bien  $\theta$  pour un pendule simple), mais ici on trouve *a priori* deux degrés de liberté. On va voir que l'on peut se ramener à un seul degré de liberté grâce à la **deuxième loi de Kepler**.

### Propriété 2 : Constante des aires

La quantité  $C = r^2\dot{\theta}$  est conservée lors du mouvement, c'est la **constante des aires**

**Preuve (non exigible) :** Il suffit d'expliciter la valeur du moment cinétique :

$\vec{L}_O(M) = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = mr\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ . Comme  $\vec{L}_O(M)$  est conservé, sa norme aussi, ie

$$r^2 \dot{\theta} = C \text{ constante.}$$

Cette constante des aires permet de démontrer la deuxième loi de Kepler (démonstration qui ne sera pas présentée).

### Propriété 3 : Deuxième loi de Kepler

Soit  $O$  le foyer principal de l'ellipse et  $M$  un point qui bouge sur l'ellipse (qui est donc en orbite). La loi des aires dit que pendant des durées égales, le segment balaie des aires égales.

Si à première vue cette loi paraît étrange (voire difficile à comprendre), sa principale conséquence est qu'un objet se déplace plus vite lorsqu'il est situé proche d'un des foyers de son orbite que lorsqu'il en est loin (cf. ??)

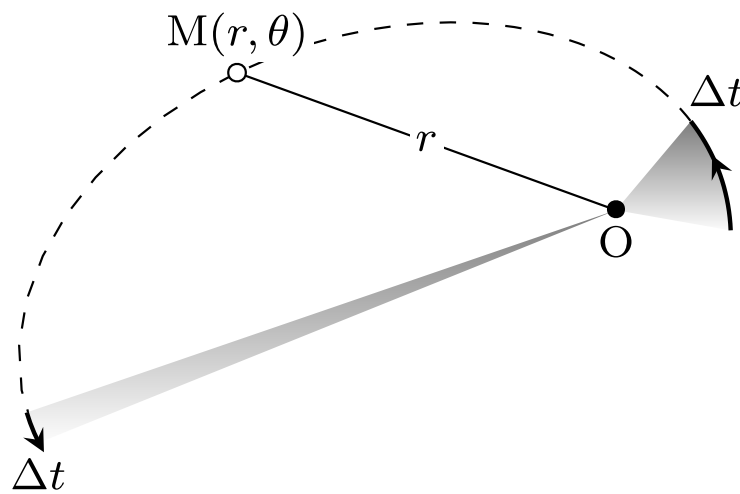


FIGURE 3 – Les aires grisées correspondent aux aires balayées par le segment  $OM$  pendant la durée  $\Delta t$ . D'après loi des aires, elles sont égales.

### Définition 4 : Energie potentielle effective

On peut alors définir l'énergie potentielle effective :  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r}$

Cette énergie potentielle effective contient toute l'information sur le type de trajectoire que peut emprunter notre système. On notera que l'on peut alors réécrire l'énergie totale de la forme suivante :

$$\mathcal{E}_m = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\text{"énergie cinétique"}} + \mathcal{E}_{p,\text{eff}} \quad (2)$$

Cette énergie potentielle effective est particulièrement importante car elle permet de décrire le type de mouvement des objets. En effet, traçons là (cf. 4), et regardons ce qu'il se passe lorsque nous avons différentes valeurs d'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$ .

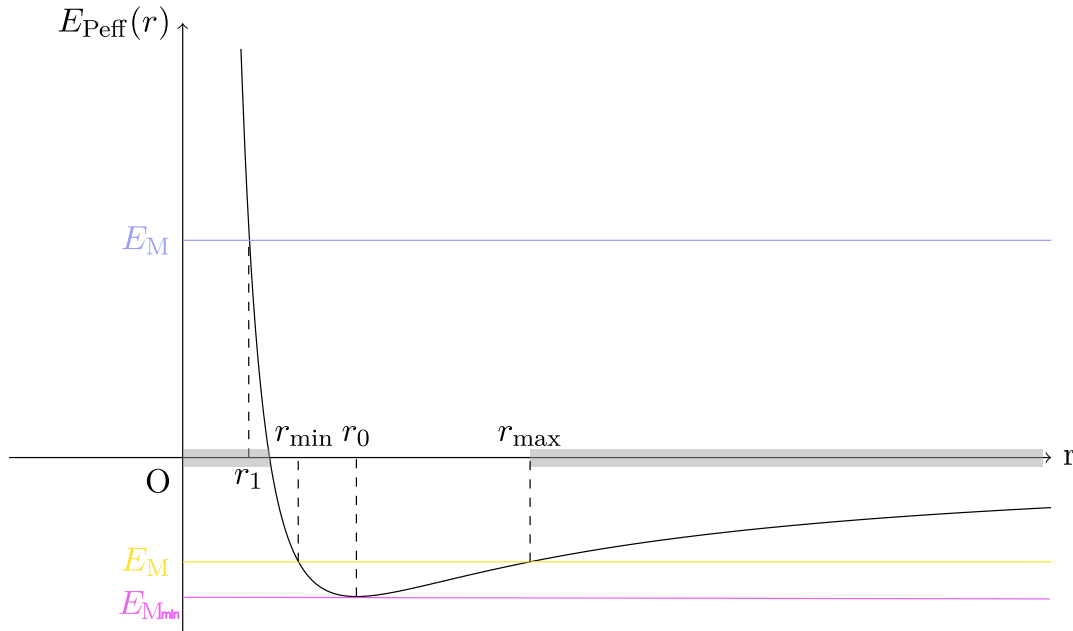


FIGURE 4 – Tracé de l'énergie potentielle effective (pour une force centrale attractive)

Il existe ainsi 4 cas différents, selon la valeur de  $\mathcal{E}_m$  qui reste constante tout au long du mouvement.

- Si  $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{m_{\min}}$ , aucune position n'est accessible : **le mouvement est impossible**
- Si  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_{\min}}$  (courbe rose), alors le mouvement est réalisé à  $r = r_0$ . On a alors un **mouvement circulaire**. De plus, on a vu que  $r_0^2 \dot{\theta} = \mathcal{C}$ , i.e  $\dot{\theta}$  est une constante, le mouvement est donc **uniforme**. Ce cas particulier très important sera étudié dans la partie suivante.
- Si  $\mathcal{E}_m > \mathcal{E}_{m_{\min}}$  (courbe jaune), on remarque que les distances accessibles sont comprises dans l'intervalle  $[r_{\min}, r_{\max}]$ . Le mouvement est donc **lié**, l'objet reste dans le puits de potentiel créé par l'astre, mais a un mouvement **elliptique** (la démonstration sera faite dans la partie sur le problème à 2 corps).
- Si  $\mathcal{E}_m \geq 0$  (courbe bleue), le système est dans un **état de diffusion**, i.e il peut sortir de l'attraction de l'astre. Le mouvement est alors **hyperbolique** (admis). le cas particulier  $\mathcal{E}_m = 0$  donne un mouvement **parabolique**. Ce cas ci ne sera pas traité dans le cours.

## 2 Mécanique céleste

### 2.1 Étude du problème classique de gravitation (cas circulaire) - Applications aux satellites

On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  (une planète) en mouvement dans le champ de gravitation créé par une masse  $M_0$  de symétrie sphérique de centre  $O$  (le Soleil). Comme vu précédemment, la force gravitationnelle subie par la masse  $m$  s'écrit :

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM_0}{r^3} \vec{r}. \quad (3)$$

On va s'intéresser à l'étude de ce système relativement facile, qui va nous permettre d'introduire un certain nombre de lois importantes. Durant cette étude, on se place dans le référentiel héliocentrique qu'on suppose galiléen.

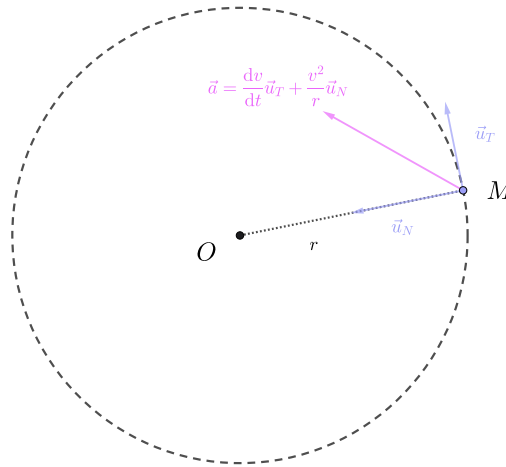


FIGURE 5 – Base locale de Frenet et valeur de l'accélération  $\vec{a}$ .

### Méthode 2 : Preuve de la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler dans le cas circulaire

On reprend les hypothèses mentionnées juste au dessus, et on se restreint au cas des mouvements circulaires. Pour étudier notre satellite, la méthode la plus efficace passe par le PFD

- On écrit l'accélération dans la base locale de Frenet figure 5 :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{u}_r + \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta \quad (4)$$

- On applique le PDF :  $m\vec{a} = F(r)\vec{u}_r$ , ce qui montre que  $\frac{dv}{dt} = 0$ , donc que la vitesse est constante.
- On en déduit la vitesse du satellite  $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{r_0}}$  où  $r_0$  est la distance de la trajectoire
- La période de révolution du satellite est  $T = \frac{2\pi r_0}{v}$ , i.e.  $\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_0}$

On a montré la **troisième loi de Kepler** dans le cas circulaire. Dans le cas où la trajectoire est elliptique, on peut montrer le résultat suivant, qui généralise ce que l'on vient de montrer

### Propriété 4 : Troisième loi de Kepler

Soit  $T$  la période de révolution sur une orbite de demi-grand axe  $a$  autour d'un objet de masse  $M_0$ . La **troisième loi de Kepler** s'écrit

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_0} \quad (5)$$

Un résultat intéressant ici, qui peut facilement se généraliser pour les forces centrales newtoniennes est le théorème du Viriel :

### Propriété 5 : Théorème du Viriel

Dans le cas de forces centrales newtoniennes, le **théorème du Viriel** donne

$$\mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{E}_p}{2} = -\mathcal{E}_c \quad (6)$$

**Preuve (dans le cas de la gravitation) :** Il suffit de remarquer que  $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$  et  $v^2 = \frac{\mathcal{G}M}{r}$ , soit  $\mathcal{E}_c = \frac{\mathcal{G}mM}{2r} = -\frac{\mathcal{E}_p}{2}$ . Or,  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c$ , d'où le résultat.

## 2.2 Étude des satellites et vitesses cosmiques

### 2.2.1 Satellite géostationnaire

Aujourd'hui, par souci de précision, un certain nombre de satellites sont dits **géostationnaires**, i.e. ils apparaissent immobiles pour un observateur terrestre. Pour qu'un tel satellite puisse exister, il doit vérifier 3 conditions, dont les démonstrations sont présentées en exercice :

1. Le plan de l'orbite doit être celui de l'équateur
2. Le mouvement du satellite doit être synchrone avec celui de la Terre (et donc l'orbite doit avoir un rayon précis)
3. Le mouvement doit être circulaire

### 2.2.2 Première vitesse cosmique

#### Définition 5 : Première vitesse cosmique

La **première vitesse cosmique** est la vitesse minimale qu'il faut fournir à un satellite pour qu'il puisse rester en orbite autour de la Terre.

#### Propriété 6 : Première vitesse cosmique

La **première vitesse cosmique** est donnée par  $v_{1c} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} \simeq 7900 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

**Preuve :** Il suffit de considérer que cette vitesse correspond à la vitesse d'un satellite en orbite rasante autour de la Terre. En négligeant l'altitude devant le rayon de la terre, on obtient  $r_{\text{orbite}} = R_T$ , et d'après ce qu'on a vu précédemment, la vitesse de ce satellite est donc  $v_{1,c} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}}$

### 2.2.3 Deuxième vitesse cosmique

Si l'on envoie notre satellite avec une vitesse trop grande, intuitivement on imagine qu'il peut aller assez loin pour ne plus "ressentir" les effets de l'attraction de la Terre et donc s'éloigner à tout jamais.

#### Définition 6 : Deuxième vitesse cosmique

La **deuxième vitesse cosmique** (ou vitesse de libération) est la vitesse minimale à fournir à un satellite pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle (et donc qu'il s'éloigne définitivement de la Terre)

### Propriété 7 : Deuxième vitesse cosmique

La **deuxième vitesse cosmique** est donnée par  $v_{2c} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = 11300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

**Preuve :** À l'état final, notre satellite est situé à une distance infinie ( $r_{\infty=\infty}$ ) de la Terre et possède une vitesse  $v_{\infty}$ . En utilisant la conservation de l'énergie mécanique entre le lancement (à  $v_{2,c}$  au niveau de la Terre) et l'état final, on obtient  $\frac{1}{2}mv_{2,c}^2 - \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T} = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 - \frac{\mathcal{G}M_T}{r_{\infty}}$ . Or, on cherche à minimiser  $v_{2,c}$ , donc on se place dans le cas  $v_{\infty} = 0$ , soit  $v_{2,c} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}}$  (car  $r_{\infty} = \infty$ ).

En définitive, pour mettre un satellite en orbite autour de la Terre, on possède une gamme de vitesse de lancement  $v \in [v_{1c}, v_{2c}]$ . On notera par ailleurs que ces raisonnements restent valables lorsque l'on s'intéresse à des vitesses de libération pour d'autres astres en remplaçant  $M_T$  par  $M_{\text{astre}}$  et  $R_T$  par  $R_{\text{astre}}$ .

**Remarque :** On définit parfois une troisième vitesse cosmique, celle définie comme vitesse de libération d'un corps du système solaire, initialement situé sur l'orbite terrestre. En négligeant l'effet de la gravité terrestre et l'altitude du satellite, on peut écrire

$v_{3c} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_S}{a}} \simeq 42100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , où  $a$  est la distance moyenne Terre-Soleil. En revanche, cette approche n'est qu'approximative, la prise en compte de la gravité terrestre rendant ce problème quasi-insoluble (problème à 3 corps). Cette problématique du problème à 3 ou  $N$ -corps en interaction est toujours étudiée (plutôt par des mathématicien.nes). Le problème à 2 corps a été entièrement résolu, et nous proposons une méthode de résolution qui fait appel à des outils développées dans le reste de ce cours dans la partie suivante.

## 3 Application au problème à 2 corps

Dans tout ce que nous avons fait précédemment, on ne s'intéresse qu'au mouvement d'un des deux objets massiques, l'autre étant supposé fixe. Le problème à 2 corps permet de décrire le mouvement des deux objets en même temps, en tenant compte du fait qu'ils agissent mutuellement l'un sur l'autre. Une méthode de résolution de ce problème est présentée dans ce qui suit.

### 3.1 Position du problème

On considère deux particules de masses  $m_i$ , de positions  $\vec{r}_i$  et de vitesses  $\vec{v}_i$  dans un référentiel galiléen. On se place dans le cas où le système  $\{m_1, m_2\}$  est isolé, les seules interactions qui existent sont les interactions  $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$  entre les masses. On définit un certain nombre de grandeurs, qui nous seront utiles pour la suite :

- $M = m_1 + m_2$  (masse totale du système)
- $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
- $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$  (masse réduite du système)
- $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  (vecteur position du centre de masse)



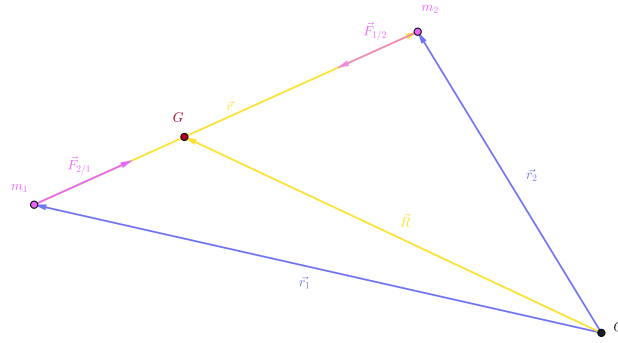


FIGURE 6 – Position du problème à 2 corps. Le point G représente le barycentre du système à 2 corps et O l'origine du référentiel.

### 3.2 Réduction du problème à 2 corps.

En premier lieu, on a envie d'appliquer le PFD à chacune des deux masses, puis d'obtenir un système d'équation et de voir si on peut le résoudre. En réalité, il est plus simple d'opérer ce qu'on appelle la **réduction du problème à 2 corps** (technique qu'on ne peut utiliser que pour  $N = 2$  corps, elle ne fonctionne plus pour  $N$  plus grand).

#### Méthode 3 : Réduction du problème à 2 corps

Pour réduire le problème à 2 corps, on écrit quand même l'équation de mouvement de chacune des particules :  $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \pm \vec{F}_i$ . On peut ensuite sommer ces équations pour obtenir

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{0} \quad (7)$$

En effet : le PFD appliqué à chacun des corps donne les équations :

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{F}_{1/2} \quad (8)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1/2} \quad (9)$$

Ainsi : (8) + (9) donne

$$\vec{0} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = M \ddot{\vec{R}} \quad (10)$$

De plus  $m_1(9) - m_2(8)$  donne

$$m_1 m_2 \cdot (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = (m_2 + m_1) \vec{F}_{1/2} \quad (11)$$

ie.

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{1/2} \quad (12)$$

Ce "changement de variable" permet de découpler les variables, puisque le mouvement de  $\vec{R}$  est donc

connu (translation rectiligne uniforme), et dans le cas où l'on connaît  $\vec{F}_{1/2}$ , ce qui est le cas pour l'interaction gravitationnelle ou électrostatique, alors on peut remonter au mouvement de  $\vec{r}$ , qui est une sorte de "particule fictive" qui caractérise notre système (en plus du centre de masse).

**Remarque :** Si jamais un des corps est beaucoup plus massif, par exemple  $m_1 \gg m_2$  (on peut prendre une étoile et un satellite par exemple). Alors, on trouve que  $\mu = m_2$ , et on peut retrouver toute la dynamique qu'on a fait juste avant avec un corps fixe (c'est rassurant).

### 3.3 Application à la gravitation

Pour la gravitation, on prend tout simplement  $\vec{F}_{1/2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$ . L'équation de mouvement se réécrit alors d'après (11) :

$$\ddot{\vec{r}} = -\mathcal{G} \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \quad (13)$$

On retrouve alors le problème de gravitation "classique" que l'on a traité dans la partie précédente.

### 3.4 Solution du problème (non exigible)

Pour résoudre cette équation du mouvement, on va changer de coordonnées, en s'intéressant à la variable  $u = \frac{1}{r(\theta)}$ . On rappelle que la loi des aires nous a donné  $r^2 \dot{\theta} = \mathcal{C}$ , ie  $\frac{\dot{\theta}}{u^2} = \mathcal{C}$ .

On projette (13) selon  $\vec{e}_r$  (cf. l'accélération en coordonnées polaires) pour obtenir

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{r^2} \quad (14)$$

Or,  $\dot{r} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{\dot{\theta}}{u^2} \frac{du}{d\theta} = -\mathcal{C} \frac{du}{d\theta}$ . Ainsi,  $\ddot{r} = \dot{\theta} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = -\mathcal{C}^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$  (avec  $\dot{\theta} = \mathcal{C} u^2$ ).

Enfin, on a  $r\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{C}^2}{r^3} = u^3 \mathcal{C}^2$

En réinjectant ceci dans (14), on obtient la nouvelle équation du mouvement :

$$-\mathcal{C}^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - u^3 \mathcal{C}^2 = -\mathcal{G}(m_1 + m_2) u^2 \quad (15)$$

Ainsi, en ré-arrangeant les termes :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{p} \quad \text{avec } p = \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} \quad (16)$$

La forme de la solution générale de cette équation différentielle est  $u = \frac{e \cos(\theta - \theta_0) + 1}{p}$ , soit

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) + 1} \quad (17)$$

C'est l'équation d'une conique, de paramètre  $p$  et d'excentricité  $e$ . Ce qui nous intéresse pour le problème à deux corps est le cas de corps liés, à savoir  $\mathcal{E}_m < 0$ . On peut montrer que cela correspond à  $0 \leq e \leq 1$ . On retrouve par ailleurs le cas circulaire avec  $e = 0$ .

Maintenant, il ne reste plus qu'à "découpler" le système. On sait que le "mobile réduit" (représenté par la

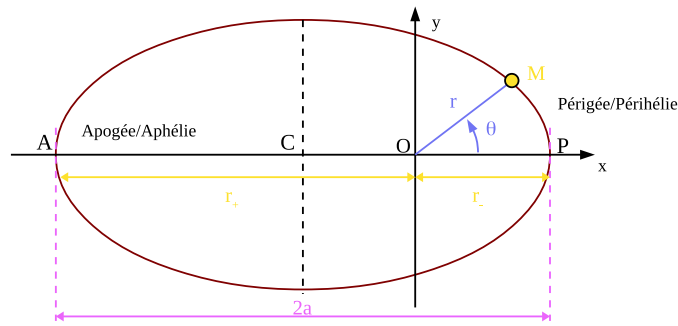


FIGURE 7 – Repérage d'un point sur une ellipse.  $C$  est le centre de l'ellipse,  $O$  le foyer sur lequel se situe "l'astre attracteur".

masse réduite  $\mu$ ) suit une orbite elliptique autour du centre de masse du système. En réexprimant  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  en fonction de  $\vec{r}$  et  $\vec{R}$ , on obtient le système :

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \quad (18)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \quad (19)$$

Les trajectoires sont représentées figure 8

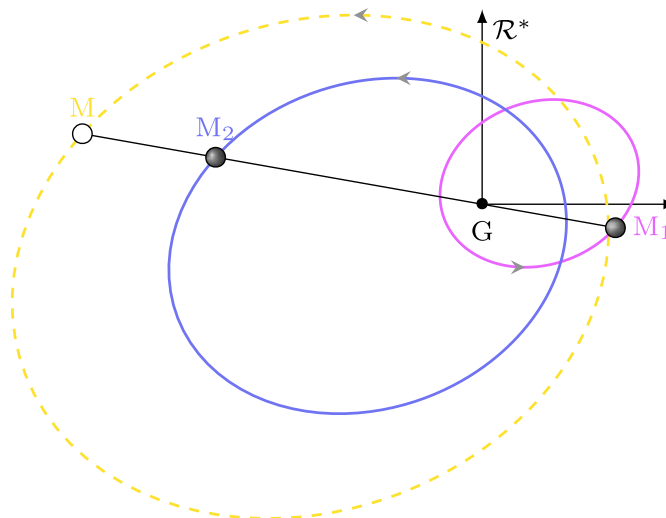


FIGURE 8 – Trajectoires des deux corps en interaction

## 4 Exercice d'application - Modèle de Bohr

### 4.1 Énoncé du problème

Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, Niels Bohr propose un nouveau modèle de l'atome, en intégrant certaines caractéristiques de la mécanique quantique (qui se développe en parallèle). Ce modèle est fortement inspiré du système solaire, avec un "astre" central, qui est le noyau (découvert par Rutherford), autour duquel gravitent des électrons grâce à la force électrostatique. Par ailleurs, on suppose que seule la force électrostatique joue un rôle et qu'il n'y a pas d'interaction gravitationnelle entre le noyau et les électrons (vous pouvez faire un calcul d'ordre de grandeur pour vous en convaincre).

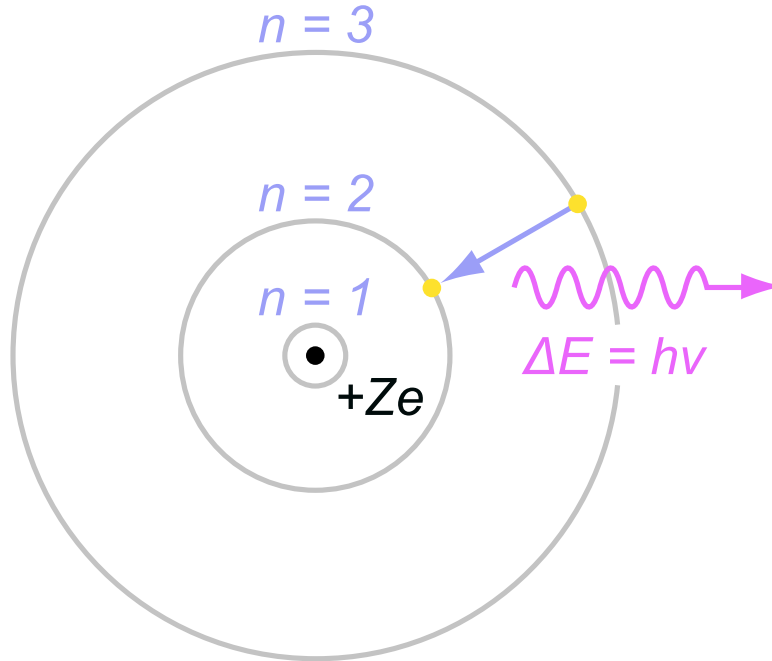


FIGURE 9 – Représentation simplifiée du modèle de Bohr. Les orbites des électrons sont des cercle, caractérisés par le nombre quantique principal  $n$ . Si l'on apporte une énergie  $\mathcal{E} = h\nu$ , alors on l'électron peut changer d'orbite.

On rappelle qu'un électron de fréquence  $\nu$  a une énergie  $\mathcal{E} = h\nu$ . On va s'intéresser à l'atome d'hydrogène, à savoir un électron en orbite autour d'un proton.

1. Justifier dimensionnellement que l'expression du moment cinétique  $L_0 = \|\vec{\sigma}_0\| = n\hbar$  est cohérente (avec  $\hbar = h/2\pi$ )
2. Pourquoi peut on considérer que le proton est immobile dans le référentiel du laboratoire ? On parle **d'approximation de Born-Oppenheimer**.
3. On suppose que l'orbite de l'électron est bien circulaire. Comme dans le cours, montrer le théorème du Viriel  $2\mathcal{E}_c = -\mathcal{E}_p$ , où  $\mathcal{E}_c$  et  $\mathcal{E}_p$  sont les énergie cinétique et potentielle respectivement.
4. Montrer que l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m = -\frac{m_e e^2}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2}$ . Calculer numériquement  $\mathcal{E}_0$  en électrons-volts.

## 4.2 Solution

1. On notera  $M$  la dimension de la masse,  $L$  celle de longueur et  $T$  celle du temps. En premier lieu,  $[\mathcal{E}] = [h][\nu]$ , soit  $[h] = [\mathcal{E}] \cdot T$ . Or,  $[\mathcal{E}] = ML^2T^{-2}$ , soit

$$[h] = ML^2T^{-1} \quad (20)$$

De plus, le moment cinétique est telle que  $[\sigma_0] = [\overrightarrow{OM} \times m\vec{v}] = LMLT^{-1} = ML^2T^{-1}$ . Comme  $[h] = [\hbar]$ , on a bien le résultat voulu. De plus, tout l'aspect quantique de la modélisation réside dans le paramètre  $n$ , qui quantifie les valeurs que peut prendre ce moment cinétique.

2. Dans le référentiel du laboratoire, on néglige le poids du proton et de l'électron. La seule force extérieure  $\vec{F}_{\text{ext}}$  à laquelle est soumis le proton est l'attraction électrostatique de l'électron. Cette attraction est la même (en norme) que l'attraction électrostatique exercée par le proton sur l'électron (par la troisième

loi de Newton elle vaut  $-\vec{F}_{\text{ext}}$ ). Si on applique le principe fondamental de la dynamique à chacun de ces particules on obtient :

$$m_p \vec{\ddot{a}}_p = \vec{F}_{\text{ext}} \quad \text{pour le proton} \quad (21)$$

$$m_e \vec{\ddot{a}}_e = -\vec{F}_{\text{ext}} \quad \text{pour l'électron} \quad (22)$$

Or,  $m_p \sim 1000m_e$ , donc l'accélération du proton est 1000 fois moins importante que celle de l'électron, on peut bien le considérer comme immobile.

3. En remarquant que la force électrostatique s'écrit sous la forme  $F(r) = -\frac{K_{\text{es}}}{r^2}$  avec  $K_{\text{es}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$  (dans le cas d'une interaction proton-électron), et que la force gravitationnelle s'écrit  $F_{\text{grav}}(t) = -\frac{K_{\text{grav}}}{r^2}$  avec  $K_{\text{grav}} = \mathcal{G}m_{\text{att}}m_{\text{syst}}$ , on peut réappliquer le même raisonnement que dans le cas du mouvement circulaire (de rayon  $R$ ) pour trouver la vitesse  $v = \sqrt{\frac{K_{\text{grav}}}{m_{\text{syst}}R}}$ . Ainsi,  $v = \sqrt{\frac{K_{\text{es}}}{mR}}$ , ce qui mène à  $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$ . Or, on sait (ou du moins on peut retrouver facilement) que  $\mathcal{E}_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ . On a donc bien  $2\mathcal{E}_c = -\mathcal{E}_p$ , c'est le théorème du Viriel. On en déduit par ailleurs - pour simplifier les notations -  $\mathcal{E}_m = -\frac{k_{\text{es}}}{2R}$ .

4. Le théorème du Viriel donne  $\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_c$ , soit  $-\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = -\frac{K}{2R}$ , d'o

$$mR^3\dot{\theta}^2 = K \quad (23)$$

De plus, le moment cinétique vaut, d'après la première question

$$L_0 = mR^2\dot{\theta} = n\hbar \quad (24)$$

En faisant le rapport de ces deux equations, on trouve  $R\dot{\theta} = \frac{K}{n\hbar}$ . Enfin, il ne reste plus qu'à réinjecter ce résultat dans la formule de l'énergie mécanique pour obtenir

$$\mathcal{E}_m = -\frac{mK^2}{2n^2\hbar^2} = -\frac{me^4}{2 \cdot 16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2n^2} = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2} \quad \text{avec } \mathcal{E}_0 = \frac{me^4}{32\epsilon_0^2\hbar^2} \quad (25)$$

L'application numérique donne  $\mathcal{E}_0 = 13.6 \text{ eV}$  !